Dans les deux bases considérées, l'application linéaire s'écrit de façon matricielle

$$\mathsf{y} = \mathsf{A}\mathsf{x} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{y}' = \mathsf{A}'\mathsf{x}' \tag{4.42}$$

Utilisant (4.40), on a

$$\mathsf{S}\mathsf{y}' = \mathsf{A}\mathsf{S}\mathsf{x}'$$

et comme S est inversible

$$\mathsf{y}' = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S}\mathsf{x}'$$

Comparant cette expression avec la seconde équation de (4.42), on trouve que la matrice de l'opérateur linéaire doit être transformée selon

$$\mathsf{A}' = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S} \tag{4.43}$$

Cette transformation constitue une *transformation de similitude*. À l'inverse d'une application linéaire qui transforme un vecteur en un autre (appartenant parfois à un autre espace vectoriel), les transformations que nous traitons ici ne modifient pas les vecteurs ou les applications linéaires mais uniquement la façon de les décrire dans des bases différentes. Ceci explique l'appellation de transformation de similitude.

On appelle *transformée* de la matrice A par la matrice inversible S la nouvelle matrice $\mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S}$. Une telle transformation peut se révéler très utile pour transformer la matrice A en une matrice présentant une forme plus simple, c'est-à-dire pour formuler le problème vectoriel dans une base plus appropriée à sa résolution.

Deux matrices A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible S telle que

$$\mathsf{B} = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S} \tag{4.44}$$

4.7.2 Scalaire, vecteur et tenseur.

En anticipant quelque peu par rapport au concepts qui seront développés dans le chapitre 5, il est approprié d'introduire ici quelques éléments de vocabulaire liés à la façon dont un changement de base affecte la représentation des objets mathématiques.

- On appelle *scalaire*, tout nombre qui est invariant lors d'un changement base.
  Les grandeurs physiques comme la température, la pression ou les dimensions géométriques des objets prennent la même valeur quelle que soit la base utilisée et sont donc des scalaires.
- Tout ensemble x de n éléments (avec $n = 3$ dans le cas particulier de l'espace physique habituel) qui se transforment comme (4.41) en cas de changement de base définit un *vecteur*.
  Le déplacement d'un objet, sa vitesse, les forces qui s'appliquent sur lui peuvent être décrits par un triplet de réels qui constituent les composantes du vecteur dans la base considérée. La même grandeur vectorielle est décrite par un triplet différent si on change de base.
- Tout ensemble A de n^2 éléments qui se transforment selon (4.43) en cas de changement de base, *i.e.* comme une application linéaire, définit un *tenseur d'ordre deux*.
  On parlera donc du *tenseur des contraintes* pour désigner l'application linéaire introduite dans l'exemple 3.4 pour associer les tensions de surface à la normale à cette surface.

De même, l'application linéaire décrivant les propriétés d'inertie en rotation d'un corps (cf. exemple 3.3) sera désignée sous le nom de *tenseur d'inertie*. Dans une base donnée, ces tenseurs peuvent être décrits par des matrices comportant $3^2 = 9$ éléments mais les valeurs de ceux-ci doivent être ajustés en fonction de la base utilisée.

Dans un espace à n dimensions, les scalaires comportent $n^0 = 1$ éléments, les vecteurs en comportent $n^1 = n$ alors que les tenseurs d'ordre deux comportent n^2 éléments. Il est dès lors commode de regrouper ces différentes notions sous un vocable commun permettant des généralisations (cf chapitre 5). On dira ainsi qu'un scalaire est un tenseur d'ordre 0 et qu'un vecteur est un tenseur d'ordre 1.

4.7.3 Propriétés des matrices semblables.

Comme toute matrice A peut être interprétée comme la représentation d'une application linéaire et que sa transformée $\mathsf{S}^{-1}\mathsf{AS}$ représente la même application linéaire dans une base différente, toutes les propriétés de A qui traduisent des propriétés de l'application linéaire (indépendante de toute base) doivent aussi être des propriétés de $\mathsf{S}^{-1}\mathsf{AS}$.

Établissons quelques-unes des propriétés les plus utiles des matrices semblables et de la transformée d'une matrice.

i. La transformée de la matrice identité $\mathbb{I}$ est la matrice identité elle-même :

$$\mathsf{S}^{-1}\mathbb{I}\mathsf{S} = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{S} = \mathbb{I} \tag{4.45}$$

ii. La transformée de A par une matrice qui commute avec A est A. Par exemple, la transformée de A par $\mathbb{I}$, A ou A^{-1} est A.

iii. La transformée de l'inverse d'une matrice est l'inverse de la transformée :

$$\mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{S} = \left(\mathsf{S}^{-1}\mathsf{AS}\right)^{-1} \tag{4.46}$$

iv. La transformation ne change pas le déterminant de A (pas plus, évidemment, que les relations linéaires entre les rangées de A) :

$$\det(\mathsf{S}^{-1}\mathsf{AS}) = \det\mathsf{S}^{-1}\,\det\mathsf{A}\,\det\mathsf{S} = \frac{1}{\det\mathsf{S}}\,\det\mathsf{A}\,\det\mathsf{S} = \det\mathsf{A} \tag{4.47}$$

v. La transformation ne change pas la trace de A.
En effet, si on note que, quelles que soient les matrices carrées A et B, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(\mathsf{AB}) &= \sum_i\sum_k a_{ik}b_{ki}\\ &= \sum_k\sum_i b_{ki}a_{ik}\\ &= \operatorname{trace}(\mathsf{BA})\end{aligned} \tag{4.48}$$

Alors,

$$\operatorname{trace}(\mathsf{S}^{-1}\mathsf{AS}) = \operatorname{trace}(\mathsf{ASS}^{-1}) = \operatorname{trace}\mathsf{A} \tag{4.49}$$

vi. Si B est la transformée de A par S, alors A est la transformée de B par S^{-1}. En effet, si $\mathsf{B} = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{AS}$, alors

$$\mathsf{A} = \mathsf{SBS}^{-1} = (\mathsf{S}^{-1})^{-1}\mathsf{BS}^{-1} \tag{4.50}$$